લિબર્ટી પેપરસેટ

ધોરણ 12 : ગણિત

Full Solution

સમય : 3 કલાક **અસાઈનમેન્ટ પ્રશ્નપત્ર 3**

PART A

1. (C) **2.** (B) **3.** (C) **4.** (D) **5.** (A) **6.** (B) **7.** (C) **8.** (B) **9.** (D) **10.** (D) **11.** (A) **12.** (A) **13.** (A) **14.** (A) **15.** (D) **16.** (C) **17.** (B) **18.** (B) **19.** (D) **20.** (A) **21.** (C) **22.** (C) **23.** (C) **24.** (B) **25.** (C) **26.** (B) **27.** (B) **28.** (C) **29.** (D) **30.** (D) **31.** (B) **32.** (B) **33.** (C) **34.** (A) **35.** (B) **36.** (D) **37.** (B) **38.** (D) **39.** (A) **40.** (C) **41.** (A) **42.** (B) **43.** (D) **44.** (A) **45.** (B) **46.** (A) **47.** (C) **48.** (C) **49.** (D) **50.** (A)

PART B

વિભાગ-A

1.

અહીં, $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right]$$

(∵ અંશ અને છેદને $\cos\frac{\pi}{2}$ વડે ભાગતાં)

$$= \tan^{-1}\left[\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$\left(\begin{aligned} &\because -\frac{3\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ &\Rightarrow -\frac{3\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}\\ &\Rightarrow -\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}\\ &\Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \quad \dots (1)\end{aligned}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]$$

$= \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$ (∵ પરિણામ (1) પરથી)

બીજી રીત :

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\cot\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$\left(\begin{aligned} &\because -\frac{3\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ &\Rightarrow -\frac{3\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}\\ &\Rightarrow -\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}\\ &\Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \quad \dots (1)\end{aligned}\right)$$

$= \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$ (∵ પરિણામ (1) પરથી)

2.

ડા.બા. $= \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$

ધારો કે, $x = \cos\theta$ લેતાં,

$\therefore\ \theta = \cos^{-1}x,\ \theta \in [0, \pi]$

$= \sin^{-1}(2\cos\theta\sqrt{1-\cos^2\theta})$

$= \sin^{-1}(2\cos\theta\sin\theta)$

$= \sin^{-1}(\sin 2\theta)$

અહીં, $\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$

$\therefore\ \cos\frac{\pi}{4} \le \cos\theta \le \cos 0$

$\therefore\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ (∵ $\cos\theta$ એ પ્રથમ ચરણમાં ઘટતું વિધેય છે.)

$\therefore\ 0 \le 2\theta \le \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ 2\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .... (1)

$\therefore\ sin^{-1}(sin\ 2\theta) = 2\theta$ ($\because$ પરિણામ (1) પરથી)

$= 2\ cos^{-1}x$

= જ.બા.

3.

➪ $y = 3cos(logx) + 4sin\ (logx)$ નું

બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$y_1 = -\ 3sin[logx] \cdot \frac{1}{x} + 4cos[logx] \cdot \frac{1}{x}$

$\therefore\ xy_1 = -\ 3sin(logx) + 4cos(logx)$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે પુનઃ વિકલન કરતાં,

$x \cdot y_2 + y_1 = -\ 3cos(logx) \cdot \frac{1}{x} + 4(-sin(logx)) \cdot \frac{1}{x}$

$\therefore\ x^2y_2 + xy_1 = -\ (3cos(logx) + 4sin(logx))$

$\therefore\ x^2y_2 + xy_1 = -\ y$

$\therefore\ x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

4.

➪ **રીત 1 :**

$\sqrt{x}$ નો વિકલિત $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ છે.

તેથી, આપણે આદેશ $\sqrt{x} = t$ લઈશું.

તેથી, $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$.

$\therefore\ dx = 2t\ dt$

આમ,

$\int \frac{tan^4\sqrt{x}\,sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{2t\ tan^4t\ sec^2t\ dt}{t}$

$= 2\int tan^4t\ sec^2t\ dt$

ફરી, આપણે આદેશ $tan\ t = u$ લઈશું.

તેથી $sec^2t\ dt = du$

$\therefore\ 2\int tan^4t\ sec^2t\ dt = 2\int u^4du$

$= 2 \cdot \frac{u^5}{5} + c$

$= \frac{2}{5}tan^5t + c \quad (u = tan\ t)$

$= \frac{2}{5}tan^5\sqrt{x} + c \ (t = \sqrt{x})$

તેથી, $\int \frac{tan^4\sqrt{x}\,sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{5}\ tan^5\ \sqrt{x} + c$

➪ **રીત 2 :**

$\int \frac{tan^4\sqrt{x}\ \ sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$

અહીં, $tan\sqrt{x} = u$ આદેશ લેતાં,

$\therefore\ sec^2\sqrt{x}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx = du$

$\therefore\ \frac{sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx = 2\ du$

$= 2\int u^4\ du$

$= \frac{2u^5}{5} + c$

$= \frac{2\ tan^5\sqrt{x}}{5} + c$

5.

➪ આવૃત્ત પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ,

$A = 4|I|$

$\therefore\ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\ dx$

$\therefore\ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\,x\ dx$

$\therefore\ I = [-cos\ x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\therefore\ I = -\ cos\frac{\pi}{2} + cos\ 0$

$\therefore\ I = 1$

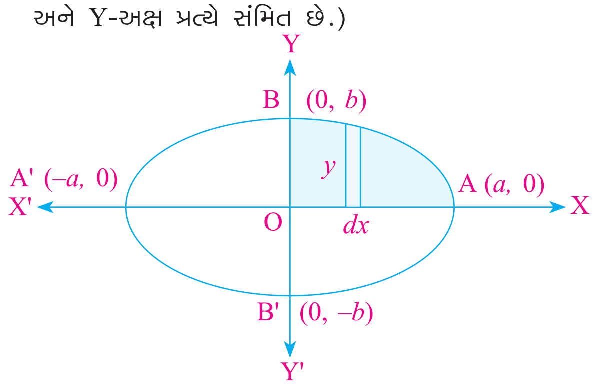
હવે, $A = 4|I|$

$= 4|1|$

$\therefore\ A = 4$ ચોરસ એકમ

6.

➪ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ઉપવલય દ્વારા આવૃત્ત પ્રદેશ ABA'B'A નું ક્ષેત્રફળ = 4 × (આપેલ વક્ર, રેખાઓ $x = 0$, $x = a$ અને X-અક્ષ દ્વારા આવૃત્ત પ્રથમ ચરણમાં આવેલ પ્રદેશ AOBA નું ક્ષેત્રફળ). (ઉપવલય એ X-અક્ષ અને Y-અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે.)



માંગેલ ક્ષેત્રફળ $= 4\int_0^a y$ (શિરોલંબ પટ્ટીઓ લેતાં)

હવે, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. આથી $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

પરંતુ, પ્રદેશ AOBA પ્રથમ ચરણમાં આવેલો હોવાથી, y ને ધન લઈશું.

આથી માંગેલ ક્ષેત્રફળ,

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\left(\frac{a}{2}\times 0+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right)-(0)\right]$$

$$= \frac{4b}{a}\,\frac{a^2}{2}\,\frac{\pi}{2} = \pi ab \text{ ચો. એકમ}$$

7.

$\sin x \cos y\, dx + \cos x \sin y\, dy = 0$

$\therefore \cos x \sin y\, dy = -\sin x \cos y\, dx$

$\therefore \dfrac{\sin y}{\cos y}\, dy = -\dfrac{\sin x}{\cos x}\, dx$

$\therefore \tan y\, dy = -\tan x\, dx$

→ બંને બાજુ સંકલન લેતાં,

$\therefore \int \tan y\, dy = -\int \tan x\, dx$

$\therefore \log|\sec y| = -\log|\sec x| + \log|c|$

$\therefore \log|\sec y| + \log|\sec x| = \log|c|$

$\therefore \log|\sec x \cdot \sec y| = \log|c|$

$\therefore \sec x \cdot \sec y = c$ ... (1)

→ વક્ર $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore \sec 0 \cdot \sec\dfrac{\pi}{4} = c$

$\therefore c = \sqrt{2}$

→ c ની કિંમત પરિણામ (1) માં મૂકતાં,

$\sec x \sec y = \sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{\sec x}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sec y}$

$\therefore \dfrac{\sec x}{\sqrt{2}} = \cos y;$

જે માંગેલ વક્રનું સમીકરણ છે.

8.

અહીં,

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$= |\vec{a}|^2-2(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2$$
$$= (2)^2-2(4)+(3)^2$$
$$= 5$$

તેથી, $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{5}$

9.

$\dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+4}{7} = \dfrac{z-6}{2}$

હવે, $\vec{a} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$

રેખાની દિશા $\vec{b} = 3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k}$

સદિશ સ્વરૂપ, $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ $\lambda \in R$

$\therefore \vec{r} = (5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k})+\lambda(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}), \lambda \in R$

જે આપેલ રેખાનું સદિશ સમીકરણ છે.

10.

ધારો કે A(1, –1, 2), B(3, 4, –2), C(0, 3, 2), D(3, 5, 6) આપેલ બિંદુઓ છે.

$\vec{b_1} = \overrightarrow{AB}$

= B નો સ્થાનસદિશ – A નો સ્થાનસદિશ

$= 2\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$

$\vec{b_2} = \overrightarrow{CD}$

= D નો સ્થાનસદિશ – C નો સ્થાનસદિશ

$= 3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{b_1}\cdot\vec{b_2} = (2\hat{i}+5\hat{j}-4\hat{k})\cdot(3\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})$

$= 6 + 10 - 16$

$= 0$

$\therefore$ $\vec{b_1}$ અને $\vec{b_2}$ પરસ્પર લંબ છે.

$\therefore$ આપેલ રેખાઓ પરસ્પર લંબ છે.

11.

$P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = P$, $P(A \cup B) = \dfrac{3}{5}$

(i) A અને B નિવારક છે.

$\therefore P(A \cap B) = 0$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{2} + P - 0$

$\therefore P = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{2}$

$\therefore P = \dfrac{1}{10}$

(ii) નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{2} + P - \dfrac{1}{2}P$

$\therefore \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}P$

$\therefore \dfrac{1}{2}P = \dfrac{1}{10}$

$\therefore P = \dfrac{1}{5}$

12.

$P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{7}{24}$, $P(B) = \dfrac{7}{12}$

P(A નહિ અથવા B – નહિ) = P(A’ ∪ B’)

$\therefore \dfrac{1}{4} = P(A \cap B)'$

$= 1 - P(A \cap B)$

$\therefore \quad P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4}$

$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{3}{4}$

$\neq \frac{7}{24}$

$\neq P(A) \cdot P(B)$

$\therefore$ A અને B પરસ્પર નિરપેક્ષ ઘટનાઓ નથી.

વિભાગ-B

13.

વિકલ્પ 1 : $x \geq 0, f(x) = \frac{x}{1+x} \geqslant 0 \quad |x| = x$

$\forall x_1, x_2 > 0, f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2}$

$\therefore x_1 + x_1x_2 = x_2 + x_1x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

વિકલ્પ 2 : $x < 0, f(x) = \frac{x}{1-x} \qquad (\because |x| = -x)$

$\therefore x_1, x_2 < 0, f(x_1) = f(x_2)$

$\therefore \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2}$

$\therefore x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

વિકલ્પ 3 : $\forall x_1, x_2 \in R, x_1 \geq 0$ અને $x_2 < 0$ લેતાં

$f(x_1) = f(x_2)$

$\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1-x_2}$

$\therefore x_1 - x_1x_2 = x_2 + x_1x_2$

$\therefore x_1 - x_2 = 2x_1x_2$ જે શક્ય નથી.

$(\because x_1 \geq 0, x_2 < 0 \; 2x_1x_2 \leq 0)$

જ્યારે $x_1 - x_2 > 0$

આ વિકલ્પ શક્ય નથી.

$\therefore$ બાકીના બે વિકલ્પ માટે

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore f$ એ એક-એક છે.

હવે કોઈ પણ $y \in (-1, 1)$ માટે

(i) $-1 < y < 0$ તો

ધારો કે, $f(x) = y \therefore f(x) < 0$

$\therefore \frac{x}{1-x} = y$

$\therefore x = y - yx$

$\therefore x + yx = y$

$\therefore x(1 + y) = y$

$\therefore x = \frac{y}{1+y} \in R$

હવે $f(x) = f\left(\frac{y}{1+y}\right)$

$$= \frac{\frac{y}{1+y}}{1 - \frac{y}{1+y}}$$

$$= \frac{y}{1+y-y} = y$$

(ii) $0 \leq y < 1$ તો

ધારો કે, $f(x) = y \therefore f(x) \geq 0$

$\therefore \frac{x}{1+x} = y$

$\therefore x = y + yx$

$\therefore x - yx = y$

$\therefore x(1 - y) = y$

$\therefore x = \frac{y}{1-y} \in R$

હવે $f(x) = f\left(\frac{y}{1-y}\right)$

$$= \frac{\frac{y}{1-y}}{1 + \frac{y}{1-y}}$$

$$= \frac{y}{1-y+y}$$

$= y$

$\therefore$ બંને વિકલ્પો માટે f એ વ્યાપ્ત થાય છે.

14.

ધારો કે A સંમિત શ્રેણિક છે.

$\therefore A' = A \qquad \dots (1)$

હવે, $X = B'AB$ લેતાં

$X' = (B'AB)'$

$= (B'(AB))' \quad (\because$ જૂથનો નિયમ)

$= (AB)' (B')'$

$= (B'A') B \quad (\because$ પરિવર્ત શ્રેણિકનાં ગુણધર્મ)

$= B'(A'B) \quad (\because$ જૂથનો નિયમ)

$= B' (AB) \quad (\because$ પરિણામ (1))

$= B'AB$

$= X$

$\therefore$ X એ સંમિત શ્રેણિક છે.

$\therefore$ B'AB સંમિત શ્રેણિક છે.

ધારો કે A એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

$\therefore \quad A' = -A \quad \dots (2)$

$X = B'AB$ લેતાં

$X' = (B'AB)'$

$= (B'(AB))'$

$= (AB)'\ (B')'$

$= (B'A')\ B$

$= (-B'A)B \qquad (\because$ પરિણામ $(2))$

$= -\ (B'A)B$

$= -\ B'AB$

$X' = -\ X$

$\therefore$ X એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

$\therefore$ B'AB વિસંમિત શ્રેણિક છે.

15.

B^{-1} શોધવા માટે,

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1(3-0) - 2(-1-0) - 2(2-0)$

$= 3 + 2 - 4$

$= 1 \neq 0$

$\therefore B^{-1}$ નું અસ્તિત્વ છે.

adj B મેળવવા માટે,

1 નો સહઅવયવ $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(3-0)$

$= 3$

2 નો સહઅવયવ $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-1-0)$

$= 1$

-2 નો સહઅવયવ $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1(2-0)$

$= 2$

-1 નો સહઅવયવ $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1)(2-4)$

$= 2$

3 નો સહઅવયવ $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(1-0)$

$= 1$

0 નો સહઅવયવ $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-2-0)$

$= 2$

0 નો સહઅવયવ $A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$

$= 1(0+6)$

$= 6$

-2 નો સહઅવયવ $A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

$= (-1)(0-2)$

$= 2$

1 નો સહઅવયવ $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1(3+2)$

$= 5$

$$adj\ B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\ adj\ B = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-30+30 & -3+12-12 & 3-10+12 \\ 3-15+10 & -1+6-4 & 1-5+4 \\ 6-30+25 & -2+12-10 & 2-10+10 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

16.

$x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$

$\therefore x\sqrt{1+y} = -\ y\sqrt{1+x}$

હવે, બંને બાજુ વર્ગ કરતાં,

$x^2(1+y) = y^2(1+x)$

$\therefore \quad x^2 + x^2y = y^2 + y^2x$

$\therefore \quad x^2 - y^2 + x^2y - y^2x = 0$

$\therefore \quad (x-y)(x+y) + (x-y)xy = 0$

$\therefore \quad (x-y)(x+y+xy) = 0$

$x - y = 0$ કે $x + y + xy = 0$

$x = y$ ત્યારે,

$$x\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+x} = 0$$

$$\therefore \quad 2x\sqrt{1+x} = 0$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+x} = 0$$

આથી, $\frac{dy}{dx}$ મળે નહીં.

$$\therefore \quad x + y + xy = 0$$

$$\therefore \quad x + y\,(1 + x) = 0$$

$$\therefore \quad y\,(1 + x) = -\,x$$

$$\therefore \quad y = \frac{-x}{1+x}$$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{(1+x)\,(1)-(x)}{(1+x)^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

17.

$$f(x) = (x + 1)^3\,(x - 3)^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x + 1)^2\,(x - 3)^3 + 3(x - 3)^2\,(x + 1)^3 \\ &= 3(x + 1)^2\,(x - 3)^2\,(x - 3 + x + 1) \\ &= 3(x + 1)^2\,(x - 3)^2\,(2x - 2) \\ &= 6(x + 1)^2\,(x - 3)^2\,(x - 1) \end{aligned}$$

→ અંતરાલ મેળવવા માટે,

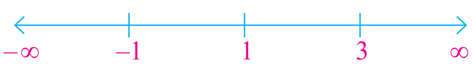
$$f'(x) = 0$$

$$\therefore \quad 6(x + 1)^2\,(x - 3)^2\,(x - 1) = 0$$

$\therefore \quad (x + 1)^2 = 0 \quad | \quad x - 3 = 0 \quad | \quad x - 1 = 0$

$\therefore \quad x + 1 = 0 \quad | \quad x = 3 \quad | \quad x = 1$

$x = -1$



$$\rightarrow \forall\, x \in (-\infty, -1) \Rightarrow (x+1)^2 > 0, (x-3)^2 > 0, x-1 < 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2\,(x - 3)^2\,(x - 1) < 0$$

$$\Rightarrow 6(x + 1)^2\,(x - 3)^2\,(x - 1) < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0$$

$\therefore f$ એ $(-\infty, -1)$ અંતરાલમાં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

$$\rightarrow \forall\, x \in (-1, 1) \Rightarrow (x+1)^2 > 0, (x-3)^2 > 0, x-1 < 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2\,(x - 3)^2\,(x - 1) < 0$$

$$\Rightarrow 6(x + 1)^2\,(x - 3)^2\,(x - 1) < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0$$

$\therefore f$ એ $(-1, 1)$ અંતરાલમાં ચુસ્ત ઘટતું વિધેય છે.

$$\rightarrow \forall\, x \in (1, 3) \Rightarrow (x+1)^2 > 0, (x-3)^2 > 0, x-1 > 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2\,(x - 3)^2\,(x - 1) > 0$$

$$\Rightarrow 6(x + 1)^2\,(x - 3)^2\,(x - 1) > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0$$

$\therefore f$ એ $(1, 3)$ અંતરાલમાં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

$$\rightarrow \forall\, x \in (3, \infty) \Rightarrow (x+1)^2 > 0, (x-3)^2 > 0, x-1 > 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2\,(x - 3)^2\,(x - 1) > 0$$

$$\Rightarrow 6(x + 1)^2\,(x - 3)^2\,(x - 1) > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0$$

$\therefore f$ એ $(3, \infty)$ અંતરાલમાં ચુસ્ત વધતું વિધેય છે.

18.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ને બે પાસપાસેની

બાજુઓ $\overrightarrow{AB} = \vec{a} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$

તથા $\overrightarrow{BC} = \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

વિકર્ણ સદિશ $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$

$$\begin{aligned} &= \vec{a} + \vec{b} \\ &= 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k} \end{aligned}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49}$$

$$|\vec{c}| = 7$$

વિકર્ણ સદિશ $\vec{c}$ ને સમાંતર એકમ સદિશ

$$= \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{3}{7}\hat{i} - \frac{6}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}$$

આ જ રીતે વિકર્ણ $\overrightarrow{BD}$ ને સમાંતર સદિશ શોધી શકાય.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ

$$\Delta = |\vec{a} \times \vec{b}| \qquad \ldots (1)$$

હવે, $\vec{a} \times \vec{b} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}) \times (\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \vec{a} \times \vec{b} = 22\hat{i} + 11\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{484+121} = \sqrt{605} = 11\sqrt{5}$$

પરિણામ (1) પરથી,

$\Delta = 11\sqrt{5}$ ચો. એકમ

19.

$$L : \vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k});$$

$$M : \vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\therefore \quad \vec{a_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$\therefore \quad \vec{b_1} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, તથા

$$\vec{a_2} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k};$$

$$\vec{b_2} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

હવે, $\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= -3\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\neq \vec{0}$$

$\therefore$ રેખાઓ છેદક અથવા વિષમતલીય છે.

$$\vec{a_2} - \vec{a_1} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$= \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

હવે, $(\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1}) \cdot (\overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{b_2})$

$= (\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (-3\hat{i} + 0\hat{j} + 3\hat{k})$

$= -3 + 0 - 6$

$= -9$

$\neq 0$

$\therefore$ રેખાઓ વિષમતલીય છે.

બે રેખાઓ વચ્ચેનું લઘુતમ અંતર,

$$= \frac{\left|(\overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{a_1}) \cdot (\overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{b_2})\right|}{\overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{b_2}}$$

$$= \frac{|-9|}{\sqrt{9+0+9}}$$

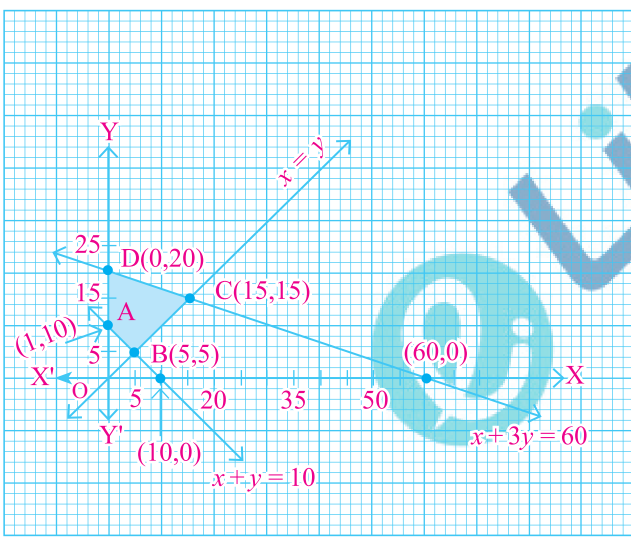
$$= \frac{9}{\sqrt{18}}$$

$$= \frac{9}{3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ એકમ}$$

20.

પ્રથમ આપણે અસમતા સંહતિ (2) થી (5) દ્વારા રચાતા શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનો આલેખ દોરીએ. આકૃતિમાં શક્ય ઉકેલનો પ્રદેશ ABCD દર્શાવવામાં આવેલ છે. આપણે નોંધીશું કે પ્રદેશ સીમિત છે. શિરોબિંદુઓ A, B, C અને Dના યામ અનુક્રમે (0, 10), (5, 5), (15, 15) અને (0, 20) છે.



શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં શિરોબિંદુઓ	$Z = 3x + 9y$ નું સંગત મૂલ્ય
A(0, 10)	90
B(5, 5)	60 → ન્યૂનતમ
C(15, 15)	180 → મહત્તમ
D(0, 20)	180 (એક કરતાં વધુ ઇષ્ટતમ મૂલ્ય)

હવે, આપણે Z ના ન્યૂનતમ અને મહત્તમ મૂલ્ય શોધીએ. કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાય છે કે, શક્ય ઉકેલના પ્રદેશના બિંદુ B(5, 5) આગળ Zનું ન્યૂનતમ મૂલ્ય 60 છે.

Z નું મહત્તમ મૂલ્ય 180 શક્ય ઉકેલના પ્રદેશનાં બે શિરોબિંદુ C(15, 15) અને D(0, 20) આગળ મળે છે.

નોંધ : ઉપરનાં ઉદાહરણમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, પ્રશ્નને એક કરતાં વધુ શિરોબિંદુઓ C અને D આગળ ઇષ્ટતમ મૂલ્ય મળે છે. એટલે કે બંને બિંદુઓએ મહત્તમ મૂલ્ય 180 મળે છે. આવી પરિસ્થિતિમાં તમે જોઈ શકો કે C અને Dને જોડતાં રેખાખંડ CD પર આવેલ દરેક બિંદુ આગળ સમાન મહત્તમ મૂલ્ય મળે. તે જ રીતે બે બિંદુઓ આગળ સમાન ન્યૂનતમ મૂલ્ય મળે તેવી પરિસ્થિતિમાં પણ આ સત્ય છે.

21.

ધારો કે, ઘટના A દર્શાવે છે કે, યંત્ર 2 સ્વીકાર્ય વસ્તુઓનું ઉત્પાદન કરે છે.

વળી, B_1 એ મશીન યોગ્ય રીતે સ્થાપિત થયું છે તે ઘટના અને B_2 એ મશીન યોગ્ય રીતે સ્થાપિત થયું નથી તે ઘટના દર્શાવે છે.

હવે, $P(B_1) = 0.8,\ P(B_2) = 0.2$

$P(A \mid B_1) = 0.9 \times 0.9$ અને

$P(A \mid B_2) = 0.4 \times 0.4$

આથી,

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2)}$$

$$= \frac{0.8 \times 0.9 \times 0.9}{0.8 \times 0.9 \times 0.9 + 0.2 \times 0.4 \times 0.4}$$

$$= \frac{648}{680}$$

$$= 0.95$$

વિભાગ-C

22.

અહીં, $B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

ધારો કે, $P = \frac{1}{2}(B + B')$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

હવે, $P' = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} = P$

આમ, $P = \frac{1}{2}(B + B')$ એ સંમિત શ્રેણિક છે.

વળી, ધારો કે,

$$Q = \frac{1}{2}(B - B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

તો, $Q' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -3 \\ \frac{-5}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q.$

આમ, $Q = \frac{1}{2}(B - B')$ એ વિસંમિત શ્રેણિક છે.

હવે, $P + Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = B$$

23.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 2(-4 + 4) + 3(-6 + 4) + 5(3 - 2)$

$= 0 + 3(-2) + 5(1)$

$= -6 + 5$

$= -1 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} નું અસ્તિત્વ છે.

adj A મેળવવા માટે,

2 નો સહઅવયવ $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1(-4 + 4)$

$= 0$

-3 નો સહઅવયવ $A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-6 + 4)$

$= 2$

5 નો સહઅવયવ $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(3 - 2)$

$= 1$

3 નો સહઅવયવ $A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= (-1)(6 - 5)$

$= -1$

2 નો સહઅવયવ $A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1(-4 - 5)$

$= -9$

-4 નો સહઅવયવ $A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-1)(2 + 3)$

$= -5$

1 નો સહઅવયવ $A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

$= 1(12 - 10)$

$= 2$

1 નો સહઅવયવ $A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$

$= (-1)(-8 - 15)$

$= 23$

-2 નો સહઅવયવ $A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1(4 + 9)$

$= 13$

$\therefore$ $adj\ A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A$

$= \frac{1}{(-1)}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}$

હવે, $2x - 3y + 5z = 11$

$3x + 2y - 4z = -5$

$x + y - 2z = -3$

શ્રેણિક સ્વરૂપે લખતાં,

$\therefore$ $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $AX = B$

જ્યાં, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $X = A^{-1}B$

$\therefore$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 - 5 + 6 \\ -22 - 45 + 69 \\ -11 - 25 + 39 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ઉકેલ : $x = 1, y = 2, z = 3$

24.

રીત-1 :

$\cos y = x\cos(a + y)$

$$\therefore\ x = \frac{\cos y}{\cos(a+y)}$$

હવે, બંને બાજુ y પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\cos(a+y)\cdot(-\sin y) - \cos y(-\sin(a+y))}{[\cos(a+y)]^2}$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dy} = \frac{-\cos(a+y)\cdot \sin y + \cos y\cdot \sin(a+y)}{\cos^2(a+y)}$$

$$= \frac{\sin(a+y-y)}{\cos^2(a+y)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sin a}{\cos^2(a+y)}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because\ \cos a \neq \pm 1 \\ \therefore\ \cos^2 a \neq 1 \\ \therefore\ 1 - \sin^2 a \neq 1 \\ \therefore\ -\sin^2 a \neq 0 \\ \therefore\ \sin^2 a \neq 0 \\ \therefore\ \sin a \neq 0 \end{array}\right)$$

રીત-2 :

$\cos y = x\cos(a + y)$

હવે, બંને બાજુ x પ્રત્યે વિકલન કરતાં,

$$-\sin y\cdot\frac{dy}{dx} = x\cdot(-\sin(a+y))\frac{dy}{dx} + \cos(a+y)$$

$$\therefore\ x\sin(a+y)\frac{dy}{dx} - \sin y\frac{dy}{dx} = \cos(a+y)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}(x\sin(a+y) - \sin y) = \cos(a+y)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(a+y)}{x\sin(a+y) - \sin y} \quad \text{.......... (1)}$$

વળી, $x = \dfrac{\cos y}{\cos(a+y)}$ પરિણામ-1 માં મૂકતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(a+y)}{\dfrac{\cos y}{\cos(a+y)}\sin(a+y) - \sin y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\cos y\cdot\sin(a+y) - \sin y\cdot\cos(a+y)}$$

$$= \frac{\cos^2(a+y)}{\sin(a+y-y)}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because\ \cos a \neq \pm 1 \\ \therefore\ \cos^2 a \neq 1 \\ \therefore\ 1 - \sin^2 a \neq 1 \\ \therefore\ -\sin^2 a \neq 0 \\ \therefore\ \sin^2 a \neq 0 \\ \therefore\ \sin a \neq 0 \end{array}\right)$$

25.

$$f(x) = \frac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$$

$$= \frac{4\sin x - x(2+\cos x)}{2 + \cos x}$$

$$f(x) = \frac{4\sin x}{2+\cos x} - x$$

$$f'(x) = \frac{(2+\cos x)(4\cos x) - 4(\sin x)(-\sin x)}{(2+\cos x)^2} - 1$$

$$= \frac{8\cos x + 4\cos^2 x + 4\sin^2 x - (2+\cos x)^2}{(2+\cos x)^2}$$

$$= \frac{8\cos x + 4(\cos^2 x + \sin^2 x) - (4 + 4\cos x + \cos^2 x)}{(2+\cos x)^2}$$

$$= \frac{8\cos x + 4 - 4 - 4\cos x - \cos^2 x}{(2+\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4\cos x - \cos^2 x}{(2+\cos x)^2} \qquad \left(\begin{array}{l} \because\ 4 - \cos x > 0 \\ \Rightarrow (2+\cos x)^2 > 0 \end{array}\right)$$

$$f'(x) = \frac{\cos x(4 - \cos x)}{(2+\cos x)^2}$$

(a) f એ ચુસ્ત રીતે વધે છે.

$f'(x) > 0$

$\therefore\ \cos x > 0$

$\therefore\ x$ એ પ્રથમ કે ચોથા ચરણમાં છે.

x પ્રથમ ચરણમાં હોય તો $x \in \left(2k\pi, (4k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

x ચોથા ચરણમાં હોય તો $x \in \left((4k+3)\frac{\pi}{2}, (2k+2)\pi\right)$

નોંધ : જો $x \in (0, 2\pi)$ તો, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ અથવા $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ માં f ચુસ્ત રીતે વધે છે.

(b) f એ ચુસ્ત રીતે ઘટે છે.

$f'(x) < 0$

$\therefore\ \cos x < 0$

$\therefore\ x$ એ બીજા કે ત્રીજા ચરણમાં હોય ત્યારે,

$x \in \left((4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+3)\frac{\pi}{2}\right)$

નોંધ : જો $x \in (0, 2\pi)$ તો, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ માં f ચુસ્ત રીતે ઘટે છે.

26.

રીત 1 :

$$I = \int\left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right]dx$$

$$= \int \log(\log x)\,dx + \int\frac{1}{(\log x)^2}dx$$

હવે, પ્રથમ સંકલિતમાં 1 ને બીજા વિધેય તરીકે લેતાં અને ખંડશઃ સંકલન કરતાં આપણને નીચે પ્રમાણે પરિણામ પ્રાપ્ત થશે :

$$I = x \log(\log x) - \int \frac{1}{x \log x} x\,dx + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x \log(\log x) - \int \frac{dx}{\log x} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} \quad \text{... (1)}$$

$\int \frac{dx}{\log x}$ માં 1 ને બીજા વિધેય તરીકે લેતાં, અને ખંડશઃ સંકલન કરતાં આપણને,

$\int \frac{dx}{\log x} = \left[\frac{x}{\log x} - \int x \cdot \left\{\frac{-1}{(\log x)^2}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}dx\right]$ મળશે. ... (2)

પરિણામ (2) ને પરિણામ (1) માં મૂકતાં,

$$I = x \log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \int \frac{dx}{(\log x)^2} + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x \log(\log x) - \frac{x}{\log x} + c$$

રીત 2 :

$$I = \int \left(\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right)dx$$

અહીં, $\log x = t$ આદેશ લેતાં,

$\therefore x = e^t$

$\therefore dx = e^t\,dt$

$$= \int \left(\log t + \frac{1}{t^2}\right) e^t\,dt$$

$$= \int e^t \left(\log t + \frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \int e^t \left\{\left(\log t - \frac{1}{t}\right) + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right)\right\} dt$$

$$= e^t \left(\log t - \frac{1}{t}\right) + c \quad \left(\because \int e^x (f(x) + f'(x))\,dx \Rightarrow e^x f(x) + c\right)$$

$$= x \left(\log(\log x) - \frac{1}{\log x}\right) + c$$

$$= x \log(\log x) - \frac{x}{\log x} + c$$

27.

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x \quad \text{... (1)}$$

પરિણામ (1) ને $\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$ સાથે સરખાવતાં

$P(x) = \cot x$

$Q(x) = 4x \operatorname{cosec} x$

→ સંકલ્યકારક અવયવ I.F. $= e^{\int P(x)\,dx}$

$= e^{\int \cot x\,dx}$

$= e^{\log|\sin x|}$

$= \sin x$

→ પરિણામ (1) ને $\sin x$ વડે ગુણતાં,

$\therefore \frac{dy}{dx} \sin x + y \cot x \sin x = 4x \operatorname{cosec} x \sin x$

$\therefore \frac{d}{dx}(y \sin x) = 4x$

$\therefore y \sin x = \int 4x\,dx$

$\therefore y \sin x = 2x^2 + c$ ... (1)

→ જો $x = \frac{\pi}{2}$ અને $y = 0$ હોય તો,

$\therefore 0 = 2\left[\frac{\pi^2}{4}\right] + c$

$\therefore c = -\frac{\pi^2}{2}$

→ c ની કિંમત પરિણામ (1) માં મૂકતાં,

$\therefore y \sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}$, જ્યાં, $\sin x \neq 0$

જે આપેલ વિકલ સમીકરણનો વિશિષ્ટ ઉકેલ છે.